

Untersuchung über den Einbezug
des Stornos in die Berechnung der Nettoprämie
und des Nettodeckungskapitals der
Krankenpflegeversicherung

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der

Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Basel

von

Felix Stohler

aus Basel

Untersuchung über den Einbezug
des Stornos in die Berechnung der Nettoprämie
und des Nettodeckungskapitals der
Krankenpflegeversicherung

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der

Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Basel

von

Felix Stohler

aus Basel

Genehmigt von der Philosophisch-naturwissenschaftlichen
Fakultät auf Antrag der Herren Professoren Dr. E. Zwinggi
und Dr. W. Gürtler

Basel, den 7. Dezember 1954

Prof. Dr. E. Baldinger
Dekan



Einleitung

Der Einbezug des Stornos in die Berechnung der Prämien und Reserven der Krankenversicherung verursacht zum Teil erhebliche Schwierigkeiten. Insbesondere verunmöglicht die starke Abhängigkeit der Zahl der vorzeitigen Vertragsauflösungen von der allgemeinen Wirtschaftslage die Bestimmung stabiler Wahrscheinlichkeiten, weshalb in der Praxis meist darauf verzichtet wird, den Storno als Ausscheideursache in die Rechnung einzubeziehen. Gleichwohl bleibt die Verpflichtung bestehen, den Einfluss der vorzeitigen Abgänge auf die Prämie und auf das Deckungskapital wenigstens abzuschätzen.

Zu diesem Problem stellt die vorliegende Untersuchung einen Beitrag dar, indem der Storno in die Berechnung der Jahresprämie und des Deckungskapitals einbezogen wird, ohne aber einen allzu grossen Rechenaufwand zu bedingen und mit der Möglichkeit, die Stornowahrscheinlichkeit nach Bedarf zu variieren. Die rechnerische Auswertung und Überprüfung erfolgte mit Stornowahrscheinlichkeiten, die aus Beobachtungen bei der Öffentlichen Krankenkasse Basel (ÖKK) in den Jahren 1944–1946 ermittelt wurden, wobei die lebenslängliche Versicherung als normal, der Wegzug aus dem Wirkungskreis der Kasse hingegen als vorzeitige Vertragsauflösung definiert ist.

Die aus dem Material der ÖKK ermittelten Stornowahrscheinlichkeiten sind zum Teil ausserordentlich hoch, weil infolge des kantonalen Versicherungsobligatoriums mit der Niederlassung fast immer ein Beitritt zur ÖKK verbunden ist, während der Wegzug aus dem Kantonsgebiet automatisch den Austritt bedingt. So wird der Storno bei den Frauen durch den noch heute anhaltenden starken Zu- und Wegzug ausländischer Hausangestellten, und bei beiden Geschlechtern durch die nicht unerhebliche Wanderung von jüngeren Angestellten im Bank- und Versicherungswesen und im Handel, weitgehend beeinflusst. Dieser Tatsache hat man bei der Bewertung der Ergebnisse bewusst zu sein. (Siehe Tabelle 5.)

1. Abschnitt

Die Jahresprämie unter Einbezug des Stornos

§ 1. Erste Näherung

Bei der Ableitung der ersten Näherung folgen wir einer Untersuchung von *E. Zwinggi* aus der Kapitalisationstheorie von *Cantelli* [1], die, sinngemäss auf die Krankenversicherung angewendet, über die folgenden Stufen zu einer Näherung für die Jahresprämie unter Einbezug des Stornos führt.

In einer Versicherungskombination ist bei gleichem Anfangsdeckungskapital ${}_0V_x$ und gleicher Prämie P_x nach der Theorie von *Cantelli* das Deckungskapital stets das nämliche, gleichgültig ob wir als Leistungen $S + \varepsilon(S - V)$ und als Ausscheideintensitäten μ ansetzen, oder ob die Leistungen S und die Intensitäten $(1 + \varepsilon)\mu$ betragen.

Bezeichnen wir allgemein mit

- $\mu_{x+t}^{(k)}$ die Intensität des Ausscheidens infolge der k -ten Ursache,
- $S_{x+t}^{(k)}$ die Leistung, die beim Ausscheiden infolge der k -ten Ursache fällig wird,
- P_{x+t} die Jahresprämie,
- ${}_tV_x$ das Deckungskapital des Systems,

so lautet, symbolisch dargestellt, die eben ausgesprochene Eigenschaft, vom Deckungskapital auf die Prämie übertragen,

$$P_{\Sigma\mu}[\sum \{S + \varepsilon(S - V)\}] = P_{\Sigma(1+\varepsilon)\mu}[\sum S], \text{ wobei } \varepsilon \equiv 0. \quad (1)$$

Von der allgemeinen Versicherungskombination zur Krankenversicherung übergehend identifizieren wir

- $\mu_{x+t}^{(1)}$ mit der Intensität der Sterblichkeit μ_{x+t} ,
- $\mu_{x+t}^{(2)}$ mit der Intensität der Stornierung λ_{x+t} ,
- $S_{x+t}^{(1)}$ mit der Todesfalleistung, die wir $= 0$ setzen,
- $S_{x+t}^{(2)}$ mit dem Abfindungswert ${}_tU_x$, über dessen Grösse wir vorläufig noch keine näheren Annahmen treffen.

Ferner haben wir die Krankenpflegekosten k_{x+t} zu berücksichtigen, die als kontinuierliche Leistung an alle in der Versicherung verbleibenden Personen betrachtet werden können. Diese Krankenpflegekosten ändern an der folgenden Umformung von (2) nichts, da sie weder von μ noch von λ abhängen; sie können ausgehend von der erwähnten Untersuchung als laufende Kosten γ aufgefasst werden.

Die Zerlegung der Jahresprämie ergibt, symbolisch dargestellt,

$$P_{\mu,\lambda}[k;0,U] = P_{\mu,\lambda}[k;0,U] - P_{\mu,\lambda}[0;0,V-U]. \quad (2)$$

In den Klammern bedeuten k die Krankenpflegekosten, 0 die an μ und U die an λ gebundenen Leistungen und V das Deckungskapital des Systems.

Mit Hilfe von (1) wird (2) umgeformt. Es ist

$$\begin{aligned} P_{\mu,\lambda}[k;0,V] &= P_{\mu,0}[k;0,V] = P_{\mu}[k;0], \\ \text{und somit} \quad P_{\mu,\lambda}[k;0,U] &= P_{\mu}[k;0] - P_{\mu,\lambda}[0;0,V-U]. \end{aligned} \quad (3)$$

Für das negative Glied in (3), das im folgenden mit R bezeichnet wird, gilt die Näherung

$$P_{\mu,\lambda}[0;0,V-U] \sim P_{\mu}[0;0,V-U] = R. \quad (4)$$

Setzen wir nun, wie in der Krankenversicherung üblich, den Abfindungswert $U = 0$, so wird

$$R_{[x]} = \frac{1}{l_x \bar{a}_x} \int_0^{\infty} e^{-\delta\tau} l_{x+\tau} \lambda_{x+\tau} \tau V_x d\tau. \quad (5)$$

In dieser Gleichung ist die Dekremententafel der Versicherten durch die gewöhnliche Absterbeordnung ersetzt.

Bei diskontinuierlicher Betrachtungsweise folgt für $R_{[x]}$ nach gleichen Überlegungen der Ausdruck

$$R_{[x]} = \frac{1}{N_x} v^{\frac{1}{2}} \sum_{t=0}^{w-x} D_{x+t} w_{[x]+t} {}_{t+1}V_x, \quad (6)$$

wobei $w_{[x]+t}$ die einjährige unabhängige Stornierungswahrscheinlichkeit bedeutet.

Aus (3) und (6) erhalten wir als erste Näherung für die Prämie unter Einbezug des Stornos

$$P_{[x]}^s \sim P_x - \frac{v^{\frac{1}{2}}}{N_x} \sum_{t=0}^{w-x} D'_{x+t} w_{[x]+t} {}_{t+1}V_x. \quad (7)$$

§ 2. Zweite Näherung

Für die vorliegende Versicherungskombination ohne Stornoabfindung lässt sich die erste Näherung (7) noch weiter vereinfachen.

Wir setzen in Formel (7) für das Deckungskapital

$${}_{t+1}V_x = \frac{K_{x+t+1}}{D_{x+t+1}} - P_x \frac{N_{x+t+1}}{D_{x+t+1}}$$

und erhalten so für die genäherte Jahresprämie

$$P_{[x]}^s \sim P_x - \frac{v^{\frac{1}{2}}}{N_x} \sum_{t=0}^{w-x} D_{x+t} w_{[x]+t} \left[\frac{K_{x+t+1}}{D_{x+t+1}} - P_x \frac{N_{x+t+1}}{D_{x+t+1}} \right]. \quad (8)$$

Das Verhältnis $D_{x+t} : D_{x+t+1}$, das in jedem Glied der Summe vorkommt, darf für alle Alter bei Männern und Frauen annähernd konstant gleich 1,03 angenommen werden. Wir können diese Tatsache in (8) verwenden. Die praktische Auswertung der Näherung (7) zeigt uns aber, dass die genäherte Prämie $P_{[x]}^s$ nur für einige wenige Alter grösser ist als die genaue $P_{[x]}^d$; es sind dies die Alter, für welche die Stornowahrscheinlichkeit extrem hohe Werte annimmt. Wenn wir daher $D_{x+t} : D_{x+t+1} = 1$ setzen, vergrössern wir die genäherte Prämie und verbessern damit die meisten Näherungswerte.

So ergibt sich als zweite Näherung der Ausdruck

$$P_{[x]}^s \sim P_x - \frac{v^{\frac{1}{2}}}{N_x} \left[\sum_{t=0}^{w-x} K_{x+t+1} w_{[x]+t} - P_x \sum_{t=0}^{w-x} N_{x+t+1} w_{[x]+t} \right]. \quad (9)$$

§ 3. Verbesserung der Näherungen für einzelne Alter mit Hilfe einer Rekursionsformel

Bei der praktischen Auswertung der 2. Näherung (9) finden wir grössere Abweichungen der genäherten von der genauen Prämie für die Alter, in denen auch die Stornowahrscheinlichkeit grosse Werte annimmt. Zugleich zeigt es sich, dass die absoluten Beträge der Abweichungen mit zunehmender abgelaufener Versicherungsdauer t rasch kleiner werden. Diese Tatsachen nützen wir für eine weitere Verbesserung der Näherung aus.

Ist auf Grund der Stornowahrscheinlichkeiten zu erwarten, dass die genäherte Prämie $P_{[x]}^s$ vom genauen Wert stark abweicht, so bestimmen wir mit der Näherung (9) den Wert für $P_{[x]+t}^s$ (z. B. mit $t = 3$) und berechnen $P_{[x]}^s$ mit Hilfe einer Rekursionsformel, die wir im folgenden ableiten.

Die Einmalprämie der Krankenversicherung ist, mit der Dekremententafel gerechnet,

$$E_{[x]}^d = \frac{K_{[x]}^d}{D_{[x]}^d} = k_{[x]} + \frac{K_{[x]+1}^d}{D_{[x]}^d}, \quad (10)$$

und für das Alter $[x] + 1$

$$E_{[x]+1}^d = \frac{K_{[x]+1}^d}{v(1-q_{[x]})(1-w_{[x]})D_{[x]}^d}. \quad (11)$$

Aus (10) und (11) folgt

$$E_{[x]}^d = k_{[x]} + v(1-q_{[x]})(1-w_{[x]})E_{[x]+1}^d, \quad (12)$$

oder

$$P_{[x]}^d \ddot{a}_{[x]}^d = k_{[x]} + v(1-q_{[x]})(1-w_{[x]})P_{[x]+1}^d \ddot{a}_{[x]+1}^d,$$

und, wenn wir die Werte der Dekremententafel durch die gefundenen Näherungen ersetzen,

$$P_{[x]}^s = \frac{1}{\ddot{a}_{[x]}^s} k_{[x]} + v(1-q_{[x]})(1-w_{[x]})P_{[x]+1}^s \ddot{a}_{[x]+1}^s. \quad (13)$$

Liegt der Rentenbarwert unter Einbezug des Stornos $\ddot{a}_{[x]+t}^s$ mindestens als Näherung vor, so erlaubt uns diese Formel, auch für solche Alter die Prämie mit genügender Genauigkeit zu berechnen, bei denen Formel (9) zu grosse Abweichungen ergibt.

2. Abschnitt

Der Leibrentenbarwert unter Einbezug des Stornos

§ 1. Allgemeiner Ansatz

Es bedeutet:

- $\ddot{a}_x$ den mit der Sterbetafel allein berechneten Rentenbarwert und
 $\ddot{a}_x^s$ den Rentenbarwert unter Einbezug des Stornos.

Ausgehend von der diskontierten Zahl der Lebenden D_x erhalten wir für den Rentenbarwert bei Berücksichtigung des Stornos

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x^s &= \frac{1}{D_x} [D_x + D_{x+1}(1-w_x) + D_{x+2}(1-w_x)(1-w_{x+1}) + \dots] \\ &= 1 + \frac{1}{D_x} \left[\sum_{t=1}^{w-x} \prod_{u=0}^{t-1} D_{x+t} (1-w_{x+u}) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Eine geeignete Gruppierung der einzelnen Glieder führt nach der Summierung der Gruppen zur folgenden Darstellung

$$\ddot{a}_x^s = \frac{1}{D_x} \left[N_x - \sum_{t=0}^{w-x} N_{x+t+1} w_{x+t} + \sum_{t=0}^{w-x} w_{x+t} \sum_{t=0}^{w-x} N_{x+t+2} w_{x+t+1} - + \dots \right]. \quad (15)$$

Das erste Glied in der Klammer ist das gewöhnliche N_x der Sterbetafel, das zweite wurde bereits zur Berechnung der Prämie verwendet.

Die Konvergenz der Reihe in der Klammer hängt in erster Linie vom Verlauf der Stornowahrscheinlichkeiten ab. Sind diese gross, wie in dem von uns beobachteten Bestand, so konvergiert die Reihe nur langsam. Auszugsweise lauten die ersten Glieder:

Tabelle 1

Alter [x] + t	N_{x+t}	$\sum_{\tau=t}^{w-x-t} N_{x+\tau+1} w_{[x]+\tau}$	...	...
Männer				
10+1	2 123 765	2 493 869	1 611 569	
10+5	1 850 378	1 320 137	583 673	
20+1	1 490 542	1 626 871	859 568	
20+5	1 281 369	544 857	133 616	
50	394 127	34 252	1 855	
Frauen				
10+1	2 226 107	3 163 874	2 422 377	1 259 776
10+5	1 948 442	1 633 531	832 530	291 238
20+1	1 582 233	2 264 285	1 477 579	583 769
20+5	1 368 450	658 352	180 894	34 769
50	452 150	48 653	3 369	164

Ein gewöhnliches Abbrechen der Reihe kommt somit praktisch einzig bei den hohen, für uns aber wenig interessanten Altern, in Betracht. Wir versuchen daher die Reihe als Ganzes zu summieren.

§ 2. Erste Näherung

Die naheliegende Annahme, die Reihe durch eine geometrische zu approximieren, führt vorerst nicht zum Ziel. Wir nehmen daher die ersten zwei Glieder von der Approximation aus (sie wurden bereits zur Berechnung der Prämie verwendet, sind also bekannt) und lassen die geometrische Folge erst mit dem zweiten Glied beginnen.

Bezeichnen wir mit Q^* den noch unbekannten Mittelwert der Quotienten zweier aufeinanderfolgender Glieder, und setzen wir ferner als Abkürzung $\sum Nw_x$ für $\sum_{t=0}^{w-x} N_{x+t+1} w_{[x]+t}$, so ist

$$\ddot{a}_x^s D_x = N_x - [\sum Nw_x - Q_x^* \sum Nw_x + Q_x^{*2} \sum Nw_x - \dots]$$

oder

$$\ddot{a}_x^s = \frac{1}{D_x} \left[N_x - \frac{\sum Nw_x}{1 + Q_x^*} \right]. \quad (16)$$

Zur Bestimmung von Q_x^* berechnen wir $\ddot{a}_x^s$ für einige Alter genau und lösen in (16) nach Q_x^* auf. Es ist

$$Q_x^* = \frac{\sum Nw_x}{N_x - \ddot{a}_x^s D_x} - 1, \quad (17)$$

wobei $\ddot{a}_x^d$ den genauen, mit der Dekremententafel berechneten Rentenbarwert bedeutet.

Der so berechnete Quotient Q_x^* muss sich für die einzelnen Alter ähnlich verhalten wie

$$Q_x' = \frac{\sum Nw_x}{N_x}.$$

Bilden wir noch $Q_x^* : Q_x'$, so folgt beispielsweise für eine abgelaufene Versicherungsdauer $t \geq 5$ (siehe Tabelle 2).

Aus dieser Tabelle geht hervor, dass $Q^* : Q'$ für ein erreichtes Alter ≥ 20 und $t \geq 5$ annähernd konstant ist,

$$Q_{x+t}^* \sim c' Q_{x+t}'.$$

Tabelle 2

Alter [x] + t	$\frac{Q_{[x]+t}^*}{Q'_{[x]+t}}$	
	Männer	Frauen
5	0,918	0,863
10	788	765
15	699	698
20	642	643
25	618	617
30	0,652	0,654
35	668	681
40	658	672
45	647	662
50	641	648

Die Formel (16) für die Berechnung des Rentenbarwerts unter Berücksichtigung des Stornos wird damit zu

$$\ddot{a}_{[x]+t}^s \sim \frac{1}{D_{x+t}} \left[N_{x+t} - \frac{\sum Nw_{[x]+t}}{1 + c' Q'_{[x]+t}} \right]. \quad (18)$$

Die Berechnung des Rentenbarwerts $\ddot{a}_{[x]+t}^s$ nach Formel (18) und der anschliessende Vergleich mit dem $\ddot{a}_{[x]+t}^d$ der Dekremententafel haben gezeigt, dass sich für Männer und Frauen die besten Resultate ergeben, wenn wir die Konstante $c' = 0,64$ setzen. Damit besitzen wir eine Näherungsformel zur Berechnung des Rentenbarwerts unter Berücksichtigung des Stornos, gültig für die erreichten Alter ≥ 20 und für $t \geq 4$. Die Aufstellung einer Dekremententafel erübrigt sich.

Es ist

$$\ddot{a}_{[x]+t}^s \sim \ddot{a}_{x+t} - \frac{1}{D_{x+t}} \left[\frac{\sum Nw_{[x]+t}}{1 - 0,64 \frac{\sum Nw_{[x]+t}}{N_{x+t}}} \right]. \quad (19)$$

Für Alter < 20 und für $t < 4$ ergibt Formel (19) zu grosse Abweichungen vom genauen Wert, als dass sie unbeschaden auch in diesem Gebiet angewendet werden dürfte. Trotz ihres beschränkten Geltungsbereichs genügt sie aber vollkommen zur Berechnung der Rentenbarwerte, die wir z. B. benötigen, um praktisch den Einfluss des Stornos auf das Deckungskapital zu messen.

§ 3. Erweiterung des Geltungsbereichs der Näherung mit Hilfe einer Rekursionsformel

Wenn wir die Näherung (19) auf selektionierte Alter mit $t < 4$ anwenden, werden die Rentenbarwerte mit abnehmender abgelaufener Versicherungsdauer immer ungenauer. Die Ursache der relativ hohen Abweichungen bilden die ebenfalls grossen Stornowahrscheinlichkeiten in den entsprechenden Altern. Wir können daher die Näherung (19) nur auf solche Alter anwenden, für die auf Grund der Stornowahrscheinlichkeiten zuverlässige Werte zu erwarten sind. Die Rentenbarwerte für die übrigen Alter bestimmen wir, indem wir aus dem zuverlässigen Näherungswert $\ddot{a}_{[x]+t}^s$ den Wert für das Alter $[x] + t - 1$ ableiten.

Mit Hilfe der Dekremententafel dargestellt wird der Rentenbarwert für das Alter $[x]$

$$\ddot{a}_{[x]}^d = 1 + \frac{N_{[x]+1}^d}{D_{[x]}^d} \quad (20)$$

und für das Alter $[x] + 1$

$$\ddot{a}_{[x]+1}^d = \frac{N_{[x]+1}^d}{v D_{[x]}^d (1 - q_{[x]}) (1 - w_{[x]})} \quad (21)$$

Aus (20) und (21) folgt, wenn wir den mit der Dekremententafel berechneten Barwert $\ddot{a}_{[x]+t}^d$ durch unsere Näherung $\ddot{a}_{[x]+t}^s$ ersetzen

$$\ddot{a}_{[x]+t}^s = 1 + v (1 - q_{[x]+1}) (1 - w_{[x]+t}) \ddot{a}_{[x]+t+1}^s \quad (22)$$

Diese Rekursionsformel erlaubt, unsere Näherungsrechnung über den Geltungsbereich von (19) hinaus auszudehnen und insbesondere auch Werte für selektionierte Alter zu berechnen.

§ 4. Zweite Näherung

Obwohl die Näherung (19) ausreicht, um den Einfluss des Stornos auf das Deckungskapital zu messen, und die Rekursionsformel (22) uns auch Werte für selektionierte Alter liefert, wollen wir doch noch eine zweite Näherung ableiten, die für alle Alter $[x] + t$ mit $t > 2$ auf direktem Weg Barwerte ergibt, deren Abweichungen von den genauen, mit der Dekremententafel berechneten Werten, kleiner sind als 1% der genauen Werte.

Wir konstruieren wie bei der ersten Näherung an Stelle der Reihe in (15) eine nichtabbrechende geometrische Folge mit gleicher Summe. Diesmal soll die Folge jedoch erst mit dem dritten Summanden beginnen, den wir als bekannt voraussetzen.

Wir bezeichnen mit Q_x^{**} den Quotienten der geometrischen Folge, und setzen als Abkürzung $\sum w \sum Nw_x$ für den Ausdruck

$$\sum_{t=0}^{w-x} w_{[x]+t} \sum_{t=0}^{w-x} N_{x+t+2} w_{[x]+t+1}.$$

Damit wird

$$\ddot{a}_x^s D_x = N_x - \sum Nw_x + [\sum w Nw_x - Q_x^{**} \sum w \sum Nw_x + Q_x^{**2} \sum w \sum Nw_x - + \dots]$$

und

$$\ddot{a}_x^s = \frac{1}{D_x} \left[N_x - \sum Nw_x + \frac{\sum w \sum Nw_x}{1 + Q_x^{**}} \right]. \quad (23)$$

Um Q_x^{**} zu berechnen, ersetzen wir den noch unbekannten Rentenbarwert $\ddot{a}_x^s$ durch den mit der Dekremententafel berechneten Wert $\ddot{a}_x^d$. Dann ergibt sich aus (23)

$$Q_x^{**} = \frac{\sum w \sum Nw_x}{\ddot{a}_x^d D_x - N_x + \sum Nw_x} - 1. \quad (24)$$

Ferner untersuchen wir das Verhältnis von Q^{**} zum zweiten Quotienten Q'' der ursprünglichen Reihe, wo

$$Q'' = \frac{\sum w \sum Nw_x}{\sum Nw_x}$$

ist, und finden für eine abgelaufene Versicherungsdauer $t \geq 5$:

Alter [x]+t	$\frac{Q_{[x]+t}^{**}}{Q'_{[x]+t}}$	
	Männer	Frauen
5	0,758	0,774
10	755	764
15	744	747
20	728	734
25	0,731	0,727
30	748	744
35	714	743
40	697	737

Tabelle 3

Wie aus dieser Tabelle hervorgeht, ist das Verhältnis $Q^{**} : Q''$ annähernd konstant,

$$Q_{[x]+t}^{**} \sim c'' Q_{[x]+t}''.$$

Formel (23) wird damit zu

$$\ddot{a}_{[x]}^s \sim \frac{1}{D_x} \left[N_x - \sum Nw_{[x]} + \frac{\sum w \sum Nw_{[x]}}{1 + c'' Q_{[x]}''} \right]. \quad (25)$$

Ein Vergleich der Rentenbarwerte, einerseits nach (25) und anderseits mit der Dekremententafel gerechnet, zeigt, dass sich die besten Näherungen ergeben, wenn wir die Konstante $c'' = 0,75$ setzen. So gelangen wir zur zweiten Näherung für den Rentenbarwert unter Einbezug des Stornos. Es ist

$$\ddot{a}_{[x]+t}^s \sim \ddot{a}_{x+t} - \frac{1}{D_{x+t}} \left[\sum Nw_{[x]+t} + \frac{\sum w \sum Nw_{[x]+t}}{1 + 0,75 \frac{\sum w \sum Nw_{[x]+t}}{\sum Nw_{[x]+t}}} \right]. \quad (26)$$

3. Abschnitt

Das Nettodeckungskapital unter Einbezug des Stornos

Mit Hilfe der früher abgeleiteten Näherungen für die Prämie und den Rentenbarwert lässt sich das Deckungskapital unter Einbezug des Stornos berechnen, ohne eine Dekremententafel aufzustellen.

Es ist

$${}_tV_{[x]}^s = \ddot{a}_{[x]+t}^s [P_{[x]+t}^s - P_{[x]}^s]. \quad (27)$$

Der Fehler des nach (27) berechneten Deckungskapitals hängt in erster Linie von den Fehlern der beiden Prämien und von der Grösse der Differenz $P_{[x]+t}^s - P_{[x]}^s$ ab. Die Fehler der Prämien weisen für weit-aus die meisten Alter das gleiche Vorzeichen auf, wodurch der Fehler der Differenz absolut verkleinert wird. Ist die Differenz der Prämien klein, so kann der relative Fehler gleichwohl gross werden. In diesen Fällen ist aber das Deckungskapital seinerseits so klein, dass der absolute Betrag des Fehlers nicht ins Gewicht fällt.

4. Abschnitt

Prüfung und praktische Auswertung der Näherungen

§ 1. Die Stornowahrscheinlichkeiten

Als Grundlage für die Berechnung der Stornowahrscheinlichkeiten wurde der Mitgliederbestand der ÖKK in der Zeit vom 1. Juli 1944 bis zum 30. Juni 1946 beobachtet.

Die Zusammensetzung des Bestandes unter einjähriger Beobachtung geht aus der folgenden Tabelle hervor.

Tabelle 4

Abgelaufene Versicherungsdauer t	Personen unter einjähriger Beobachtung		
	1.7.1944–30.6.1945	1.7.1945–30.6.1946	Total
Männer			
0	1 209	1 300	2 509
1	1 988	2 405	4 393
2	1 936	2 068	4 004
3	2 104	1 799	3 903
4	1 865	2 096	3 961
> 4	44 889	45 402	90 291
			109 061
Frauen			
0	1 330	1 645	2 975
1	2 808	2 502	5 310
2	2 335	2 500	4 835
3	2 398	2 173	4 571
4	2 182	2 316	4 498
> 4	52 867	54 140	107 007
			129 196

Die unabhängige einjährige Stornowahrscheinlichkeit wurde getrennt für Männer und Frauen und für fünfjährige Altersgruppen ermittelt.

Bezeichnen wir in einer Altersgruppe mit gleicher abgelaufener Versicherungsdauer mit

B den Bestand unter einjähriger Beobachtung,

A die Austritte in der Beobachtungszeit,

E die Eintritte in der Beobachtungszeit,

T die Todesfälle in der Beobachtungszeit,

so ist die unausgeglichene einjährige unabhängige Stornowahrscheinlichkeit gleich

$$\bar{w} = \frac{A}{B + \frac{E - T}{2}}.$$

Bei der Ausgleichung ergaben Brunssche Reihen die besten Ergebnisse [2]. Über die Grösse der ausgeglichenen Wahrscheinlichkeiten orientiert uns auszugsweise Tabelle 5.

Tabelle 5

Die einjährige unabhängige Stornowahrscheinlichkeit

Alter [x]	Abgelaufene Versicherungsdauer					
	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t \geq 5$
Männer						
0	0,0084	0,0336	0,0066	0,0260	0,0304	0,0004
5	0250	1216	0451	0730	0651	0086
10	0473	2350	1286	1312	0999	0336
15	0653	3005	2092	1686	1336	0570
20	0697	2845	2220	1582	1214	0559
25	0565	1925	1524	0968	0656	0312
30	0293	0868	0598	0330	0156	0174
Frauen						
0	0,0072	0,0247	0,0092	0,0206	0,0297	0,0064
5	0322	0955	0687	0632	0614	0234
10	0747	2824	2151	1485	0896	0475
15	1103	5079	3429	2314	1023	0647
20	1161	4600	3240	2119	0918	0628
25	0930	1849	1849	1101	0571	0363
30	0502	0327	0635	0305	0221	0172

§ 2. Die doppelt abgestufte Dekremententafel

Zur Aufstellung der Dekremententafel verwenden wir die aus den Beobachtungswerten ermittelten und ausgeglichenen Stornowahrscheinlichkeiten, während die Sterbenswahrscheinlichkeiten den schweizerischen Volkssterbetafeln SM und SF 1939–1944 entnommen wurden.

Bedeutung

$w_{[x]+t}$ die einjährige unabhängige Stornowahrscheinlichkeit
und

$q_{[x]+t}$ die einjährige unabhängige Sterbenswahrscheinlichkeit,
so wird die Abfallsordnung

$$L_{[x]+t+1} = L_{[x]+t} (1 - w_{[x]+t}) (1 - q_{[x]+t}).$$

Der Rechnungszinsfuss für die Kommutationszahlen beträgt $2\frac{1}{2}\%$.

Die jährlichen Krankenpflegekosten $k_{[x]}$ wurden der Morbiditätsstatistik 1936 der ÖKK entnommen und der Teuerung entsprechend mit 1,8 multipliziert.

§ 3. Prüfung der Näherungen

Legende zu den Tabellen 6 und 7

Tabelle 6

P	Netto-Jahresprämie ohne Einbezug des Stornos.
P^d	Genaue, mit der Dekremententafel berechnete Prämie.
P^s	Mit der Näherungsformel (9) berechnete Prämie.
P'^s	Verbesserung mit der Rekursionsformel (13), ausgehend von der mit (9) berechneten Prämie für das Alter $[x] + 3$.

Tabelle 7

$\ddot{a}$	Leibrentenbarwert ohne Einbezug des Stornos.
$\ddot{a}^d$	Genauer Rentenbarwert, mit der Dekremententafel berechnet.
$\ddot{a}^s$	Mit Formel (19), 1. Näherung, oder mit Formel (26), 2. Näherung, berechneter Rentenbarwert.
$\ddot{a}'^s$	Verbesserung mit der Rekursionsformel (22), ausgehend von mit (26) berechneten Rentenbarwert für das Alter $[x] + 3$.

Der Einbezug des Stormos in die Berechnung der Jahresprämie

Tabelle 6

Alter [x]+t	Männer						Frauen					
	P	P ^d	P ^s	P ^{'s}	P ^d —P ^s	P ^d —P ^{'s}	P	P ^d	P ^s	P ^{'s}	P ^d —P ^s	P ^d —P ^{'s}
5+0	59,81	57,17	56,04	56,69	+ 19,7	+ 8,4	77,62	68,55	68,04	7,5	9,1	—
5+2	59,09	55,14	54,43	54,60	+ 13,0	+ 9,9	78,27	68,70	68,76	— 0,9	—	—
5+4	59,12	54,64	54,16		+ 8,8		79,59	70,31	70,74	— 6,1	—	—
10+0	59,38	54,09	53,86		+ 4,4		80,39	68,88	70,53	69,65	— 24,0	— 11,2
10+2	60,08	55,17	55,03		+ 2,7		82,07	72,73	74,03	73,72	— 17,9	— 13,6
10+4	61,09	56,82	56,64		+ 3,1		84,24	77,24	78,12	— 11,3	—	—
15+0	61,77	55,98	56,74	55,95	— 13,6	+ 0,4	85,57	71,41	77,66	71,54	— 87,5	— 1,8
15+2	63,12	59,73	59,56	59,73	+ 2,8	0	88,06	82,92	84,14	83,16	— 14,7	— 3,0
15+4	63,88	61,12	60,80		+ 5,2		89,71	87,47	87,47	0	—	—
20+0	64,06	60,89	60,66		+ 3,8		90,23	86,69	87,65	86,57	— 11,0	+ 1,5
20+2	64,49	61,51	61,32		+ 3,1		90,95	89,32	89,28	+ 0,5	—	—
25+0	65,38	62,16	62,10		+ 1,0		91,52	90,43	90,16	+ 3,0	—	—
30+0	68,04	65,43	65,32		+ 1,8		91,35	89,77	89,35	+ 1,4	—	—
35	72,13	70,22	70,05		+ 2,3		92,05	90,17	90,13	+ 0,4	—	—
40	77,01	75,59	75,53		+ 0,8		95,52	93,93	93,91	+ 0,2	—	—
45	82,62	81,71	81,62		+ 1,0		99,62	98,34	98,33	+ 0,1	—	—
50	87,74	87,05	87,06		0		103,76	102,71	102,71	0	—	—

Der Einbezug des Stornos in die Berechnung des Rentenbarwerts

Tabelle 7

Alter [x] + t	Männer					Frauen				
	$\ddot{a}$	$\ddot{a}^d$	$\ddot{a}^s$	$\ddot{a}'^s$	$\ddot{a}^d - \ddot{a}^s$	$\ddot{a}^d - \ddot{a}'^s$	$\ddot{a}$	$\ddot{a}^d$	$\ddot{a}^s$	$\ddot{a}'^s$
1. Näherung	15	28,90	15,14	14,74	0/100	0/100	29,94	14,10	13,60	0/100
	20	27,61	15,43	15,41	+ 26,6	+ 35,5	28,71	14,86	14,83	+ 35,5
	25	26,28	17,43	17,49	- 0,9	- 1,6	27,40	17,23	17,32	+ 1,6
	30	24,76	19,24	19,22	- 3,7	- 5,0	25,94	19,63	19,61	- 5,0
	35	23,01	19,02	19,00	- 0,8	+ 1,1	24,30	19,77	19,74	+ 1,1
2. Näherung	40	21,06	18,10	18,09	- 1,1	+ 1,9	22,46	18,95	18,93	+ 1,9
	45	18,97	16,88	16,88	+ 0,4	+ 1,0	20,44	17,83	17,83	+ 1,0
					0	0				0
	5+2	30,80	15,64	15,74	- 6,4	- 4,9	31,71	14,10	14,26	- 12,0
	5+4	30,37	16,31	16,36	- 3,0	- 6,1	31,31	14,71	14,80	- 6,1
2. Näherung	10+2	29,66	12,11	12,14	- 2,6	- 8,2	30,65	10,34	10,43	- 8,2
	10+4	29,16	14,28	14,28	0	- 2,1	30,18	13,50	13,53	- 2,1
	15+2	28,38	10,50	10,38	+ 10,9	+ 5,0	29,46	8,35	8,16	+ 23,1
	15+4	27,87	14,01	13,97	+ 2,7	+ 2,6	28,96	14,00	13,96	+ 2,6
	20+2	27,10	11,60	11,46	+ 12,0	+ 4,0	28,20	9,86	9,62	+ 24,3
2. Näherung	20+4	26,56	15,89	15,87	+ 1,5	+ 1,5	27,67	16,23	16,21	+ 1,5
	25+2	25,70	15,21	15,17	+ 2,4	+ 3,3	26,84	14,86	14,81	+ 3,3
	25+4	25,08	18,49	18,48	+ 0,2	+ 0,2	26,25	19,02	19,01	+ 0,2
	30+2	24,08	18,43	18,43	0	0	25,31	18,96	18,96	0
	30+4	23,37	19,21	19,21	0	0	24,64	19,83	19,83	0

§ 4. Der Einfluss des Stornos auf die Prämie und das Deckungskapital

Wie Tabelle 8 zeigt, wird die Prämie durch den Einbezug des Stornos in die Berechnung allgemein verkleinert. Beim Deckungskapital der einzelnen Versicherten ist dies nicht der Fall. Um den Einfluss des Stornos auf das Deckungskapital des ganzen Versichertenbestandes erkennen zu können, reichen daher die Beispiele in Tabelle 8 nicht aus. Erst die Berechnung des gesamten Deckungskapitals eines Bestandes, sowohl ohne, als auch mit Einbezug des Stornos, lassen verbindliche Schlüsse auf dessen Einfluss zu.

Eine Auszählung des Mitgliederbestandes der ÖKK nach dem Alter und der Versicherungsdauer war aus technischen Gründen nicht möglich, einzig der Abgang (Austritte und Todesfälle) konnten in dieser Weise erfasst werden. Immerhin lässt sich damit, ausgehend von dem zur Berechnung der Stornowahrscheinlichkeiten erfassten Bestand, ein der Wirklichkeit nahe kommender Versichertenbestand konstruieren.

Wir bezeichnen mit

${}_tM_x$ den Bestand der x -jährigen Versicherten mit einer abgelaufenen Versicherungsdauer t und

${}_tA_x$ den Abgang an x -jährigen Versicherten mit einer abgelaufenen Versicherungsdauer t .

Von der Berechnung der Stornowahrscheinlichkeiten her sind uns alle ${}_tM_x$ für $t < 5$, sowie $\sum_{t=5}^{39} {}_tM_x$ bekannt. Ebenso kennen wir ${}_tA_x$ für alle möglichen t .

Treffen wir die Annahme, die Storno- und die Sterbenswahrscheinlichkeit $w_{[x]+t}$ und $q_{[x]+t}$ seien für $t \geq 5$ unabhängig von der abgelaufenen Versicherungsdauer, so ergeben sich die Versicherungsbestände mit gleichem Alter und gleicher abgelaufener Versicherungsdauer $t \geq 5$ aus der Relation

$$\frac{{}_tA_x}{\sum_{t=5}^{39} {}_tA_x} = \frac{{}_tM_x}{\sum_{t=5}^{39} {}_tM_x},$$

also

$${}_tM_x = \frac{{}_tA_x \sum_{t=5}^{39} {}_tM_x}{\sum_{t=5}^{39} {}_tA_x}.$$

Ein in dieser Weise berechneter Versichertenbestand kommt dem Mitgliederbestand der ÖKK sehr nahe. Bei der Berechnung des Deckungskapitals ergibt sich für die Männer durch den Einbezug des Stornos eine Reduktion um 8,5 %, für die Frauen eine solche um 3,6 %. Das Deckungskapital des gesamten Bestandes vermindert sich bei Berücksichtigung des Stornos um 5,5 % (Tabelle 9).

Tabelle 8

Der Einfluss des Stornos auf die Prämie und das Deckungskapital

Legende: $P_{[x]}$: Netto-Jahresprämie ohne Einbezug des Stornos.

$P_{[x]}^s$: Netto-Jahresprämie unter Einbezug des Stornos.

${}_tV_{[x]}$: Netto-Deckungskapital ohne Einbezug des Stornos.

${}_tV_{[x]}^s$: Netto-Deckungskapital unter Einbezug des Stornos.

Alter [x]	Männer			Frauen		
	$P_{[x]}$	$P_{[x]}^s$	$P^s - P$	$P_{[y]}$	$P_{[y]}^s$	$P^s - P$
5	59,81	56,04	— 3,77	77,62	68,04	— 9,58
10	59,38	53,86	— 5,52	80,39	70,53	— 9,86
15	61,77	56,74	— 5,03	85,57	77,66	— 7,91
20	64,06	60,66	— 3,40	90,23	87,65	— 2,58
25	65,38	62,10	— 3,28	91,52	90,16	— 1,36
30	68,04	65,32	— 2,72	91,35	89,35	— 2,00
35	72,13	70,05	— 2,08	92,05	90,13	— 1,92
40	77,01	75,53	— 1,48	95,52	93,91	— 1,61
45	82,62	81,62	— 1,00	99,62	98,33	— 1,29
50	87,74	87,06	— 0,68	103,76	102,71	— 1,05

Alter [x] + t	Männer			Frauen		
	${}_tV_{[x]}$	${}_tV_{[x]}^s$	$V^s - V$	${}_tV_{[y]}$	${}_tV_{[y]}^s$	$V^s - V$
15+ 5	63,21	77,85	+ 14,64	133,92	248,90	+ 114,98
+ 15	155,64	183,63	+ 27,99	150,00	355,17	+ 204,17
+ 25	338,23	354,32	+ 16,09	223,54	423,50	+ 199,96
+ 35	436,19	479,50	+ 43,31	332,24	511,90	+ 179,66
20+ 5	34,92	31,81	— 3,11	35,29	62,28	+ 26,99
+ 15	185,87	178,69	— 7,18	44,15	70,43	+ 26,28
+ 25	352,23	353,91	+ 1,68	191,89	209,81	+ 17,92
+ 35	438,98	455,33	+ 16,35	282,43	300,80	+ 18,37
25+ 5	65,63	65,50	— 0,13	— 4,44	— 9,96	— 5,52
+ 15	256,44	243,07	— 13,37	89,85	71,04	— 18,81
+ 25	375,42	384,74	+ 9,32	223,53	206,10	— 17,43
30+ 5	94,30	90,07	— 4,23	17,01	15,51	— 1,50
+ 15	276,73	275,24	— 1,49	169,07	160,18	— 8,89
+ 25	381,05	391,44	+ 10,39	264,58	259,70	— 4,88
35+ 5	107,54	99,16	— 8,38	77,97	71,56	— 6,41
+ 15	262,05	178,31	— 83,74	213,87	206,55	— 7,32
40+ 5	106,47	102,79	— 3,68	83,81	78,76	— 5,05
+ 15	250,43	251,35	+ 0,92	197,91	192,28	— 5,63

Nettodeckungskapital des

Netto-Deckungskapital eines dem Mitgliederbestand

Alter [x] + t	Abgelaufen							
	0-4		5-9		10-14		15-19	
	m. S. *	o. S. *	m. S.	o. S.	m. S.	o. S.	m. S.	o. S.
Männer								
0-9	— 500	— 485	— 680	— 650	.	.	.	.
10-19	+ 22	+ 24	+ 45	+ 67	— 470	— 363	— 230	— 157
20-29	+ 21	+ 26	+ 68	+ 76	+ 37	+ 38	+ 53	+ 71
30-39	+ 53	+ 54	+ 181	+ 158	+ 387	+ 396	+ 234	+ 233
40-49	+ 28	+ 30	+ 276	+ 287	+ 380	+ 386	+ 445	+ 446
50-59	+ 13	+ 13	+ 60	+ 62	+ 90	+ 90	+ 173	+ 173
60-69	+ 1	+ 2	+ 7	+ 8	+ 55	+ 57	+ 71	+ 72
70-	0	0	+ 1	+ 1	+ 3	+ 3	+ 11	+ 11
Total	— 362	— 336	— 42	+ 9	+ 482	+ 607	+ 757	+ 849
Frauen								
0-9	— 303	— 244	— 246	— 85	.	.	.	.
10-19	+ 77	+ 66	+ 136	+ 193	+ 59	+ 294	+ 320	+ 555
20-29	+ 31	+ 25	+ 192	+ 103	+ 131	+ 88	+ 182	+ 188
30-39	+ 14	+ 20	+ 39	+ 89	+ 93	+ 77	+ 181	+ 103
40-49	+ 28	+ 29	+ 300	+ 322	+ 239	+ 264	+ 188	+ 222
50-59	+ 15	+ 16	+ 91	+ 95	+ 91	+ 95	+ 231	+ 238
60-69	+ 9	+ 9	+ 52	+ 52	+ 133	+ 134	+ 133	+ 133
70-	0	0	0	0	+ 21	+ 21	+ 49	+ 48
Total	— 129	— 79	+ 564	+ 769	+ 767	+ 973	+ 1284	+ 1487

* m. S.: Mit Einbezug des Stornos. o. S.: Ohne Berücksichtigung des Stornos.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt das Problem, den Einfluss des Stornos auf die Prämie und das Deckungskapital der Krankenversicherung zu messen, ohne die Dekremententafel berechnen zu müssen.

Bei der Bestimmung der Prämie unter Einbezug des Stornos führt die Kapitalisationstheorie von *Cantelli*, die wir sinngemäss auf die Krankenversicherung anwenden, zu den beiden Näherungen (7) und (9). Die anschliessende praktische Auswertung zeigt, dass grössere Abweichungen der genäherten von der genauen Prämie nur für die Alter zu erwarten sind, in denen auch die Stornowahrscheinlichkeit grosse Werte annimmt, wobei der Fehler mit zunehmender abgelaufener Versicherungsdauer rasch kleiner wird. Um auch in diesen Altern eine genügende Genauigkeit zu haben, können einzelne Werte mit Hilfe der Rekursionsformel (13) wesentlich verbessert werden.

Die numerische Prüfung ergibt, dass der Fehler mit wenig Ausnahmen kleiner ist als $\frac{1}{2}\%$ des genauen Wertes. Die abgeleiteten Formeln genügen also, um den Einfluss des Stornos auf die Prämie abzuschätzen.

Die Berechnung des Deckungskapitals setzt die Kenntnis des Leibrentenbarwerts unter Einbezug des Stornos voraus. Darum wird dieser im zweiten Abschnitt in Form einer Reihe dargestellt, deren erste zwei Glieder aus der Berechnung der Prämie bereits bekannt sind. Das Abbrechen dieser Reihe oder die direkte Approximation durch eine geometrische Folge führen vorerst nicht zum Ziel. Die Summation wird aber mit genügender Genauigkeit möglich, wenn wir die Approximation erst mit dem zweiten Glied der Reihe beginnen. Die mit dieser ersten Näherung (19) berechneten Barwerte weisen für die Alter ≥ 20 und für $t \geq 5$ Fehler von maximal $\frac{1}{2}\%$ der genauen Werte auf, und mit der Rekursionsformel (22) können auch Barwerte für selektionierte Alter mit einer abgelaufenen Versicherungsdauer $t < 5$ bestimmt werden.

Obwohl die Genauigkeit und der Geltungsbereich der ersten Näherung (19) zur praktischen Lösung unserer Aufgabe, den Einfluss des Stornos auf das Deckungskapital abzuschätzen, genügt, führen wir die Untersuchung über den Einbezug des Stornos in die Berechnung des Rentenbarwerts noch einen Schritt weiter. Bei Verwendung der gleichen Reihe beginnen wir die Approximation erst mit dem dritten Glied. Die so gewonnene zweite Näherung (26) ergibt bei einem grösseren Geltungsbereich genauere Werte, erfordert aber einen grösseren Rechenaufwand.

Mit der Jahresprämie und dem Rentenbarwert wird im dritten Abschnitt das Deckungskapital unter Einschluss des Stornos bestimmt, und damit unsere Aufgabe gelöst.

Der vierte Abschnitt bringt zum Schluss die Prüfung und praktische Auswertung der Näherungen sowie eine Betrachtung über den Einfluss des Stornos auf die Prämie und das Deckungskapital.

Literaturverzeichnis

- [1] *E. Zwinggi*: Untersuchung über den Einbezug der vorzeitigen Vertragsauflösung in die Berechnung und Darstellung der Tarifprämie der Todesfall- und Erlebensfallversicherung, mvsv, h 43, 1943.
- [2] *W. Friedli*: Darstellung der Altersverteilung der Rentenbezüger der EVK durch Brunsche Reihen, mvsv, h 20, 1925.
- [3] *HR. Liechti*: Der Storno in der Krankengeldversicherung, Bern Phil. II, Diss. 1949.

Lebenslauf

Am 24. September 1920 wurde ich als Sohn des Dr. Hans Stohler, Lehrer am Mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasium, und der Rosalie, geb. Perzy, in meiner Heimatstadt Basel geboren und bestand im Jahre 1940 am Mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasium Basel die Maturitätsprüfung. Hierauf studierte ich an der Universität Basel Versicherungslehre, Mathematik, Volkswirtschaftslehre und Astronomie. Während der ersten Jahre unterbrach der Aktivdienst öfters meine Studien; in der Folge wurde mir die Leitung der Morbiditätsstatistik 1948 der Öffentlichen Krankenkasse Basel übertragen.

Ich besuchte die Vorlesungen und Übungen der Herren Professoren Zwinggi, Furlan, Gürtler, Niethammer, Ostrowski, Renfer, Salin, Speiser, Spiess und Wagner. Diesen Herren möchte ich hier für die Anregungen, die ich durch sie empfangen habe, meinen Dank aussprechen.

Mein besonderer Dank gebührt Herrn Professor Zwinggi, unter dessen Leitung die vorliegende Dissertation entstanden ist.

